ESTATÍSTICA I - 2º Ano Economia, Prova intercalar 25. 10. 19

1hora. (cotação 10 valores – 40% nota final)

Nome:____**Número:**_____

Espaço reservado para classificações				
1a.(10)	2a.(10)	3.(15)	4.(10)	5a.(10)
1b.(10)	2b.(10)			5b.(15)
	2c.(10)			

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com função probabilidade conjunta dada por

$y \setminus x$	0	1	2	$f_Y(y)$
0	0.12	0.42	0.06	0.6
1	0.21	0.06	0.03	0.3
2	0.07	0.02	0.01	0.1
$f_X(x)$	0.4	0.5	0.1	

a. Obtenha a **função de distribuição marginal** de X .

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.4 & 0 \le x < 1 \\ 0.9 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

b. Calcule $P(X > Y)$, $P(X > Y \mid X = 2)$ e o 2º momento da variável aleatória X em relação à origem.

$P(X > Y) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1)$ =0.42+0.06+0.03=0.51

$$P(X > Y|X = 2) = \frac{P(X>Y \cap X=2)}{P(X=2)} = \frac{P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)}{f_X(2)} = \frac{0.09}{0.1}=0.9$$

$$\mu_2' = E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 * f_X(x) = 1 * 0.5 + 4 * 0.1 = 0.9$$

2. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade dada por $f_X(x) = 6x(1-x)$, $0 < x < 1$.

a. Calcule $P(X < 0.5)$ e $P(X < 0.5 \mid X < 0.7)$.

$$P(X < 0.5) = \int_0^{0.5} 6x(1-x)dx = 6\int_0^{0.5} x(1-x)dx = 6\left[\!\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\!\right]\begin{matrix}0.5\\0\end{matrix} = 6\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right] = \frac{1}{2}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x 6x(1-x)dx & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$P(X < 0.5 | X < 0.7) = \frac{P(X < 0.5 \cap X < 0.7)}{P(X < 0.7)} = \frac{P(X < 0.5)}{P(X < 0.7)} = \frac{1/2}{\frac{0.7^2}{2} - \frac{0.7^3}{3}} = 0.6378$$

b. Obtenha a variância da variável aleatória X .

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - \mu_X^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = 0.05$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x)dx = \int_0^1 x * 6x(1-x)dx = 6\int_0^1 x^2(1-x)dx = 6\left[\!\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\!\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

$$= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 * 6x(1-x)dx = 6\int_0^1 x^3(1-x)dx = 6\left[\!\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]\!\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

$$= 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

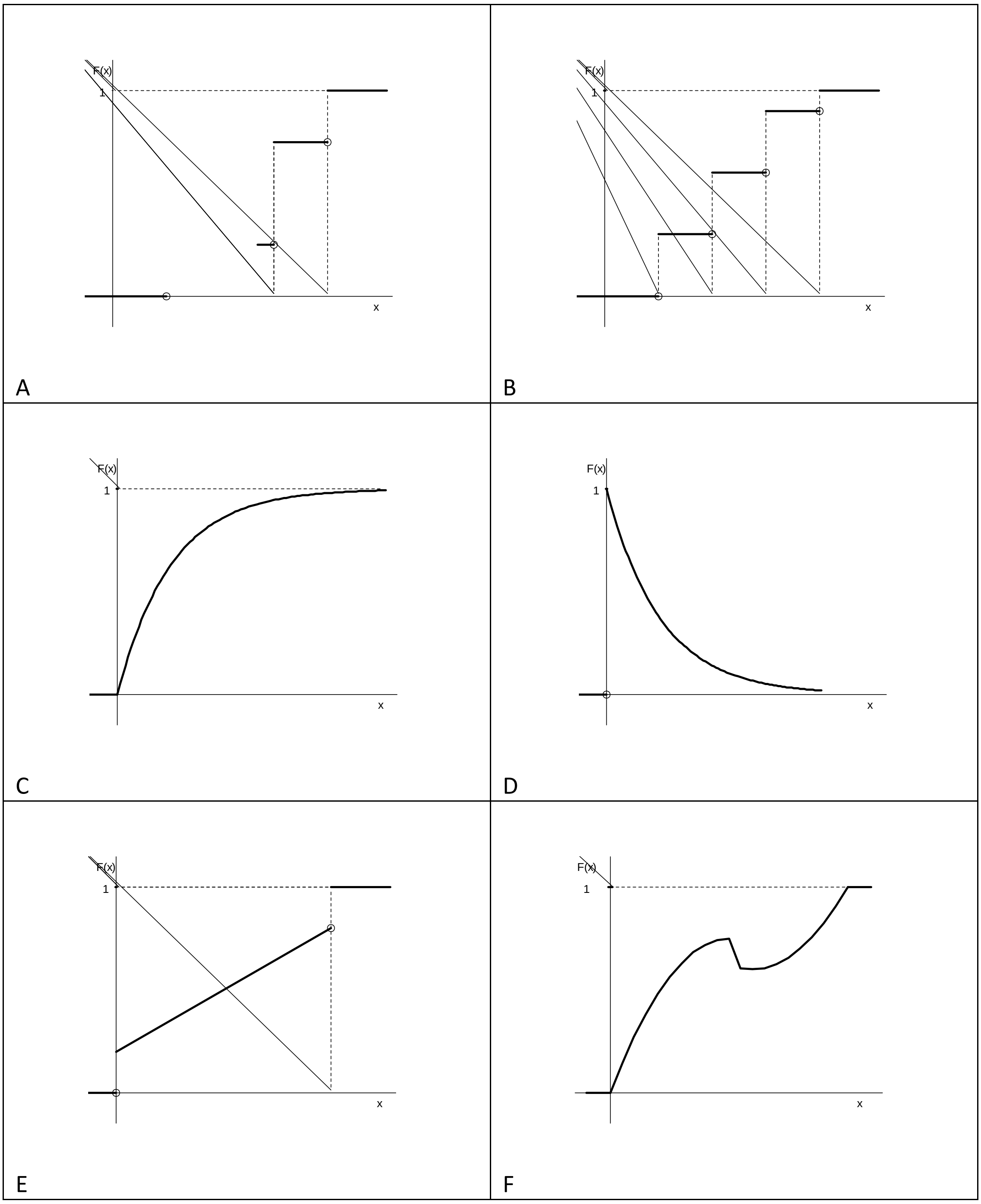
c. Obtenha a distribuição da variável aleatória $Y = 3X - 2$.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(3X - 2 \le y) = P\left(X \le \frac{y+2}{3}\right) = F_X\left(\frac{y+2}{3}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & y < -2 \\ 3\left(\frac{y+2}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{y+2}{3}\right)^3 & -2 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

3. Na figura abaixo são apresentados 6 gráficos em cada um dos quais se representou uma função $F(x)$ em "bold". Assinale quais podem corresponder à função de distribuição de uma variável aleatória contínua, de uma variável aleatória discreta ou de uma variável aleatória mista e quais não podem corresponder a uma função de distribuição.

Gráfico	A	B	C	D	E	F
Não pode ser função de distribuição	X			X		X
Função distribuição de uma v.a mista					X	
Função distribuição de uma v.a contínua			X			
Função distribuição de uma v.a discreta		X				



4. Sejam A e B dois acontecimentos com probabilidade positiva definidos no espaço Ω tais que $P(A)=P(B|A)=p$ e $P(B)=q$. Existirá um valor de q tal que os acontecimentos A e B sejam independentes?

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(B|A)\times P(A)=p^2$$

Para que A e B sejam independentes, $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=pq$

Assim q será solução da equação $pq=p^2$ isto é $p=q$

5. A probabilidade de um indivíduo sofrer de determinada patologia rara na população é 0.01. Existe um teste de despistagem que não é perfeito: ele deteta a patologia quando esta está presente com probabilidade 0.95 mas, infelizmente, também assinala falsos positivos (isto é deteta quando a patologia não está presente) com probabilidade 0.01.
   a. Tendo o teste dado positivo qual a probabilidade do individuo sofrer da patologia.

      Definam-se os acontecimentos A "Sofrer da patologia" e B "teste dar positivo".

      $$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)\times P(A)}{P(B)}=\frac{0.95\times 0.01}{0.0194}=0.4897$$

      Já que, pelo teorema da probabilidade total

      $$P(B)=P(B|A)\times P(A)+P(B|\bar{A})\times P(\bar{A})=0.95\times 0.01+0.01\times 0.99=0.0194$$

      Uma vez que $\{A,\bar{A}\}$ formam uma partição do espaço de resultados Ω

   b. Qual a probabilidade de o teste dar positivo 2 vezes quando realizado de forma independente em 2 pessoas. Será esta probabilidade a mesma se o teste for realizado duas vezes na mesma pessoa? Se sim, explique porquê, caso não, calcule esta probabilidade.

C "o teste dá positivo em duas pessoas independentes"

Como as pessoas são independentes, $P(C)=P(B)^2=0.0194^2=0.000376$

D "o teste dá positivo em 2 provas independentes na mesma pessoa".

A grande diferença é que, sendo a mesma pessoa, esta sofre o não da patologia nas 2 experiências. Assim

$$\begin{aligned}P(D)&=P(B|A)^2\times P(A)+P(B|\bar{A})^2\times P(\bar{A})=0.95^2\times 0.01+0.01^2\times 0.99\\&=0.009025+0.000099=0.009124\end{aligned}$$